

確率的ボラティリティモデルの拡張と比較

~日米株価インデックスの連動性を利用した二変量確率的ボラティリティモデル~

東京理科大学 工学部 4年生
鳥居裕

2007年11月

目次

1	はじめに.....	2
1.1	研究背景.....	2
1.2	研究目的.....	2
2	確率的ボラティリティモデル.....	3
2.1	確率的ボラティリティモデル.....	3
2.2	二変量確率的ボラティリティモデル.....	3
2.3	確率的ボラティリティモデルの推定.....	3
2.3.1	最尤法による推定.....	3
2.3.2	ベイズ推定.....	3
2.3.3	マルコフ連鎖モンテカルロ法.....	4
2.3.3.1	ギブス・サンプラー.....	5
2.3.3.2	シングル・ムーブ・サンプラー.....	5
2.3.4	収束判定.....	5
2.3.4.1	Geweke.....	6
2.3.4.2	Heidelberger and Welch.....	6
2.3.4.3	Raftery and Lewis.....	6
3	事例研究.....	7
3.1	データ.....	7
3.2	ソフト・ライブラリ.....	7
3.3	モデルおよび解析の設定.....	7
3.4	結果と考察.....	9
4	まとめ.....	12
5	おわりに.....	12
6	参考文献.....	13
	Appendix.....	14

1章 はじめに

1.1節 研究背景

株価など資産価格の変動がどのくらい大きいかを表す指標に「ボラティリティ(Volatility)」がある。ボラティリティは値動きの幅であるため、「ボラティリティが高い」ということは「大きな損失をする可能性が高い」というリスクを意味している。そのためリスク管理が叫ばれる近年では、ボラティリティの重要性が増している。現にボラティリティは、Value at Risk と呼ばれるリスク管理指標や、金融派生商品の価格付けを行うブラック・ショールズ式や、様々な格付けなどに大きな影響を与えている。

それに伴い、過去のデータからボラティリティを予測するモデル式には大きな注目が寄せられてきた。その一つに確率的ボラティリティモデル(Stochastic Volatility model: 以下 SV モデル)がある。この SV モデルは尤度関数が求められないため、研究が遅れていた。しかし、マルコフ連鎖モンテカルロ法[6]によるベイズ推定が示されて以来は広く研究が行われ、多くの拡張モデルが示されてきた。例えば、扱うデータを 2 種類に増やした二変量(bivariate)SV モデル(以下 BSV モデル)もそのひとつである。通常の SV モデルとは異なり、為替・株価・取引高など様々な二変量間の関係を用いることで、ボラティリティの予測精度を高めている[6]。これは金融資産が互いに強く影響し合う現代の金融取引市場を考えれば、非常に重要な予測モデル式である。しかしながら、特に国内において、BSV モデルのような多変量(Multivariate)SV モデルを扱った研究は少ない。

1.2節 研究目的

事前に判明している株価連動性を組み入れた BSV モデルがボラティリティ予測精度向上に役立つかどうかを示す。具体的には日米株価インデックス(本研究では TOPIX と Standard & Poor's 500 Stock Index) の連動性を示した上で、グレンジャー因果性と BSV モデルを用いてボラティリティを予測する。それを通常のモデルと比較して、結果の特徴と共にモデル評価も行う。本研究のメリットは、ボラティリティの予測精度向上を促し、1.1 節で述べたボラティリティが大きく影響を与える指標の改善が期待される点にあると考える。

グレンジャー因果性の定義: 将来の x の値を予測するにあたり、「過去の x の値に基づく式」と「過去の x の値と y の値に基づく式」を比較する。その結果、後者の予測精度が良くなる場合、「 y から x へのグレンジャー因果性」が存在する。

2章 確率的ボラティリティ予測モデル

2.1節 単変量確率的ボラティリティモデル

単変量 SV モデルを示す.

$$y_t = \exp(h_t / 2)\varepsilon_t \quad \dots(1) \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.N_1(0,1) \quad t = 1, \dots, n$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t \quad \dots(2) \quad \eta_t \sim i.i.d.N_2(0, \sigma^2)$$

求めたいボラティリティは(1)式の $\exp(h_t/2)$ であり,(2)式の自己回帰をしている h_t はボラティリティの二乗の対数値である.なお(1)式のボラティリティを $\exp(h_t/2)$ と複雑な項で表記してある理由は, h_t を $\log(\text{ボラティリティ})^2$ と書くことで(2)式を複雑にしたくないためである.したがって二乗の対数値が h_t になるようにした $\exp(h_t/2)$ がボラティリティとした.次に, y_t は対数収益率, ε_t は確率変数, μ は h_t の期待値(平均), η_t は誤差項. ϕ はショックの持続性を表しており,絶対値が 1 以下である.この SV モデルの最大の特徴は,ボラティリティ自体が誤差項の影響を受け,確率的に変動する点にある.したがって $t-1$ 期の値だけでは t 期のボラティリティが求まらないのである.

2.2節 二変量確率的ボラティリティモデル

扱うデータ(y)を 2 銘柄に増やした BSV モデルを以下に示す.

$$y_t = \Omega_t \varepsilon_t \quad \dots(3) \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.N_1(0, \Sigma_\varepsilon) \quad t = 1, \dots, n$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t \quad \dots(4) \quad \eta_t \sim i.i.d.N_2(0, \Sigma_\eta)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \rho_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma_\eta = \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & \rho_\eta \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho_\eta \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\mu : E[h_t] \quad \Omega_t = \text{diag}(\exp(h_{t1}/2), \exp(h_{t2}/2)) \quad \phi = \text{diag}(\phi_{11}, \phi_{22}) \quad \rho_\varepsilon, \rho_\eta : \varepsilon, \eta \text{の相関係数}$$

2.2.1 最尤法による推定

最尤法について述べる.データとして株価終値の対数収益率である y_t を与え h_t を導き出す.その h_t に対して尤も当てはまりの良いパラメータ(μ など)を推定する.具体的には,「データは固定値」および「パラメータは変数」として,尤度関数と呼ばれる f (データ|パラメータ)を最大化する.ARCH 型と呼ばれるボラティリティ予測モデルでは本手法による推定が可能であるが,複雑な SV モデルは尤度関数を解析的に解くことができない.すなわち SV モデルは最尤法を使うことができないのである.

2.2.2 ベイズ推定

ベイズの定理を利用した SV モデルの推定を考える.求めたいパラメータをひとまとめにした変数を θ ,データを $data$ とおくと,ベイズの定理は以下のようになる.なお $f(a|b)$ とは条件 b が与えられた状態で事象 a が起こる確率である.

$$f(\theta | data) = \frac{f(data | \theta)\pi(\theta)}{\pi(data)} \dots(5), \quad \pi(data) = \int f(data | \theta)\pi(\theta)d\theta$$

$\pi(\theta)$ はパラメータの事前分布であり, $\pi(\text{data})$ は周辺尤度または基準化定数と呼ばれている.次に, $f(\theta|\text{data})$ はあるパラメータの事後分布であり,「ある与えられたデータ」の下で「そのパラメータ」が得られる確率を指す. $f(\text{data}|\theta)$ は尤度関数であり,「得られたパラメータ」の下で「あるデータ」が得られる確率,つまりは「推定されたパラメータ」がどれほど「データ」を説明できるかを示す.したがってベイズの定理においても,尤度が必要なため、SV モデルの推定にベイズの定理を直接使うことは出来ない.

2.2.3 マルコフ連鎖モンテカルロ法

そこでマルコフ連鎖モンテカルロ法(Markov Chain Monte Carlo Method:以下 MCMC 法)を利用して,SV モデルの事後分布からのサンプリングを行う.本来は求めることができない事後分布からのサンプリングは不可能だが,MCMC法の特徴を使うことで事後分布からのサンプリングを可能にする.まずは以下の表でMCMC法の定義を説明する.

表 1:MCMC 法

MCMC 法	マルコフ連鎖の不変分布から乱数を用いたサンプリングを行う手法
マルコフ性	将来起こる事象は現在の状態だけから決まる性質(過去の状態に依存しない).式で表すと, $f(x_{n+1} x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{n+1} x_n)$ となり, x_{n+1} の条件付確率には一期前の x_n のみが必要である(過去の値である x_1, x_2, \dots, x_{n-1} は必要がない)
確率過程	時間とともに変化する確率変数
マルコフ過程	マルコフ性をもつ確率過程
推移核	$f(x_{n+1} x_n)$ という条件付確率密度関数
マルコフ連鎖	<p>離散的なマルコフ過程である. x_0 から x_{n+1} の同時確率密度関数は</p> $f(x_0, \dots, x_{n+1}) = f_0(x_0)f(x_1 x_0)f(x_2 x_0, x_1) \cdots f(x_{n+1} x_0, \dots, x_n)$ $= f_0(x_0)f(x_1 x_0)f(x_2 x_1) \cdots f(x_{n+1} x_n)$ $= f_0(x_0) \prod_{i=0}^n f(x_{i+1} x_i) \cdots (6)$ <p>となり,x_0の周辺確率密度関数 f_0と推移核に依存している.このマルコフ連鎖を繰り返すことで,不変分布に収束することがある.</p>
不変密度	<p>次のような推移核 fをもつとき,πを推移核 fの不変密度と言う.</p> $\pi(\tilde{x}) = \int \pi(x)f(\tilde{x} x)dx \quad (7)$
不変分布 (定常分布)	<p>確率分布が不変密度を確率密度関数にもつとき,その確率分布をマルコフ連鎖の不変分布と言う.なお不変分布は推移核にのみ影響され,f_0には依存しない.また何回繰り返しても</p> $\pi(\tilde{x}) = \int \pi(x)f'(\tilde{x} x)dx$ <p>となり, x_tの確率分布は πを密度関数にした不変分布であり続ける.</p>
エルゴード性	不変分布に収束するマルコフ連鎖がもつ性質であり,既約性と非周期性を有する.
既約性	どこから出発してもどこでも有限回の推移で到達可能なこと
非周期性	一定の時間間隔で訪れる状態空間がないこと
モンテカルロ法	現象をシミュレーションする際,乱数を用いて数値計算を行い,問題の近似解を得る方法.

不変分布が事後分布となるように設定しているため、「不変分布からのサンプリング」を「事後分布からの確率標本」すなわち「パラメータ推定用の確率標本」と見なせる。

2.2.4 ギブス・サンプラー

MCMC 法のアルゴリズムである。上述の「不変分布が事後分布となるように設定する」ための手法でもある。以下に SV モデルのサンプリングの流れを示す(簡略化のため求めるべきパラメータを μ, τ, φ とおいている)。

(1) 適当な分布からのパラメータ初期値 $\mu^{(0)}, \tau^{(0)}, \varphi^{(0)}, h^{(0)}_1, \dots, h^{(0)}_n$ を用意する。なお上付き()内文字が反復回数であり, h の下付き文字は時点 t である。(h の初期値サンプリングは 2.2.2 参照)

(2) マルコフ連鎖を利用して、一期先のパラメータを得る

- ・ 事後確率密度関数 $\pi(\mu^{(1)} | \tau^{(0)}, \varphi^{(0)}, h^{(0)}_1, \dots, h^{(0)}_n)$
- ・ 事後確率密度関数 $\pi(\tau^{(1)} | \mu^{(0)}, \varphi^{(0)}, h^{(0)}_1, \dots, h^{(0)}_n)$
- ・ 事後確率密度関数 $\pi(\varphi^{(1)} | \tau^{(0)}, \mu^{(0)}, h^{(0)}_1, \dots, h^{(0)}_n)$
- ・ 事後確率密度関数 $\pi(h^{(1)}_1 | \tau^{(0)}, \mu^{(0)}, h^{(0)}_2, \dots, h^{(0)}_n)$
- ・
- ・ 事後確率密度関数 $\pi(h^{(1)}_n | \tau^{(0)}, \mu^{(0)}, h^{(0)}_1, \dots, h^{(0)}_{n-1})$

これにより反復回数 $i=1$ のパラメータ $\mu^{(1)}, \tau^{(1)}, \varphi^{(1)}, h^{(1)}_1, \dots, h^{(1)}_n$ を全て得たとする。なお(2)式より上述の事後確率密度が解析的に求まることが分かる。

(3) 上記手順のようにして、 $\mu^{(i)}, \tau^{(i)}, \varphi^{(i)}, h^{(i)}_1, \dots, h^{(i)}_n$ から $\mu^{(i+1)}, \tau^{(i+1)}, \varphi^{(i+1)}, h^{(i+1)}_1, \dots, h^{(i+1)}_n$ の発生を繰り返す。これは「得られた事後確率」を「次の解析に用いる事前確率」と考えてベイズ推定を繰り返すため、初期値に依存しないよう段階的に客観性を高めている。

(4) i が十分に大きい数 m であるとき、事後確率密度関数は収束する

(5) $i=m$ 以降に得られた標本は全て不変分布からのサンプリングとなる

2.2.5 シングル・ムーブ・サンプラー

2.2.1 にあるようにパラメータ推定には $h^{(0)}_1, \dots, h^{(0)}_n$ が必要である。そこでデータとして与える y_t と h_0 の初期値から、標本の大きさ n の数だけ各時点の h_t を 1 つずつサンプリングする手法をシングル・ムーブ・サンプラーという。ただし h_t は持続性の強いいため、自己相関が高くなり、収束が遅くなってしまふ。それを解決する手法にマルチ・ムーブ・サンプラー、ミクスチャー・サンプラーが存在するが、プログラムは大変複雑になる。そこで収束の自己相関が高まることに関しては、反復回数の増加および解析設定で対応する(詳しくは 3-1-1 WinBUGS の解析設定)。

2.2.6 収束判定

マルコフ連鎖を扱う以上、「そのマルコフ連鎖は果たして不変分布になっているのか」すなわち「マルコフ連鎖が収束しているかどうか」を調べなければならない。なおどの収束判定も万能でなく、いくつかの方法を試して多角的に検証するべきである。そこで本研究では S-PLUS のライブラリ BOA(後述)を用いて 3 種類の収束検定を用いる。以下に各収束判定方法の概要を示す(詳しい計算方法は[5])なお、概要内に出てくる有意水準などの判定ラインは BOA に組み込まれている値で示してある。

2.2.6.1 Geweke

マルコフ連鎖の前半 10%の標本平均と後半 50%の標本平均が同じかどうかを有意水準 $\alpha=0.05$ で仮説検定する。もしも既にマルコフ連鎖が不変分布ならば、同じ分布からサンプリングしているため、2 つの標本の平均値はほぼ等しくなる。したがって、p 値が 0.05 以上なら仮説を採択して、マルコフ連鎖は収束していると判断する。

2.2.6.2 Heidelberger and Welch

マルコフ連鎖が一様エルゴード性をもつかどうかの検定。周期性判定に必要なスペクトル密度を組み入れた変数がブラウン橋に近似するため Cramer von Mises の統計量を用いて収束判定を行う。なおブラウン橋とは、ブラウン運動の数学的なモデルであるウィーナー過程に、 $W_0=W_1=0$ という最初と最後が同じである条件をつけた確率分布である。まず定常性テストでは、仮説が棄却される度にパラメータの最初の 10%を捨て、仮説が採択されるまで同検定を繰り返す。半値幅(山形の関数の広がり程度の程度を表す指標)を用いたテストでは、平均の信頼区間の半値幅から、平均は許容範囲内の精度で推定されているかどうか調べている。

2.2.6.3 Raftery and Lewis

各パラメータの 2.5%から 97.5%の 95%信頼区間における精度 ± 0.005 に基づき、必要反復回数(連鎖長の大きさ)、必要 burn in 回数(初期値に依存する区間)、thin(thinning)と呼ばれる何個おきに標本を抽出すべきかを表した指標などを理論的に導いてくれる。出力結果である依存因子(dependence factor)の値が 5 以上であると、その変数は独立であるとは言い難く、収束しているとは言えない。

3章 事例研究

3.1節 データ[1][2]

期間 2003 月 10 月 1 日から 2006 年 9 月 29 日の日米市場の共通営業日(=476 日分)

内容 TOPIX(東証株価指数),Standard & Poor's 500 Stock Index の日次終値の対数収益率

$y_t = \log(P_t/P_{t-1})$ P_t : t 時点の終値をデータとする.

表 2 時点 t,t-1 間の y_t の相関係数

当日と前日の y_t の相関係数 r(%)		S&P	
		t	t-1
TOPIX	t	9.3	41.4
	t-1	-5.8	9.3

表 2 より TOPIX と前日の S&P は 41.4%もの正の相関があると分かる.しかし,「S&P と前日の TOPIX」および「TOPIX と S&P 当日」はほぼ無相関である.したがって,日本市場は一方的に前日のアメリカ市場に影響されていると分かる

3.2節 ソフト・ライブラリ

ギブス・サンプラーを支援するフリーソフト Win BUGS (Windows Bayesian inference Using Gibbs Sampling)[3]を用いてパラメータを推定し,S-PLUS のライブラリ BOA (Bayesian Output Analysis Program)[4]を用いて出力結果の収束診断や分析を行う.

3.3節 モデルおよび解析の設定

Win BUGS では(2)式の h_t にあたる潜在変数が多変量正規分布に従うとして,サンプリングすることができない[3].そのため誤差項 η_t の非対角成分は 0 とした上で,比較する 2 つのモデルを示す.

(1) グレンジャー因果性付き(Granger causality) BSV モデル(以下 GC-BSV モデル)

連動性を考慮して, (2)式 φ の非対角成分の存在を許し,TOPIX に前日の S&P のボラティリティが影響するよう φ_{12} を有効な変数とした.さらにモデル簡略化およびデータ以外の相関関係を省くため,リターンの相互依存を示す $\rho_\varepsilon=0$ とおいた.

(2) 基本(Basic) BSV モデル(以下 B-BSV モデル)

φ の非対角成分を 0, $\rho_\varepsilon=0$ とおいた,単変量 SV モデルを並列計算するだけのモデルである.

表 3 事前分布[6][7][8][10]

パラメータ		事前分布	初期値
期待値	μ_1, μ_2	正規分布(平均 0,分散 1)	0
ショックの持続性	φ_1, φ_2	$(\varphi+1)/2$ がベータ分布(平均 20,分散 1.5)	0.99
ショックの持続性	φ_{12}	正規分布(平均 0,分散 0.1)	0.8
GC の影響度	φ_{12}	正規分布(平均 0,分散 0.1)	0
誤差項の分散	τ_1, τ_2	逆ガンマ分布(平均 2.5, 分散 0.025)	100

- Win BUGS では分布の分散部分には逆数を入れる必要があるため,誤差項 τ_t の分散部分に入る逆ガンマ分布 σ^2 は逆数にして,ガンマ分布 $1/\sigma^2$ にした[3].
- 発生させるマルコフ連鎖(chain)は,1 本のみで長く行うことにした[6].
- Over-relax(次のサンプリングにおいて出来るだけ相関が低いものを選ぶ)を全反復に適用
- 自己相関減少のため 20 回計算させて 1 回分の反復を採択する設定(thin20)を行う
- 初期値に影響される稼動期間(burn in)を 10,000 回,反復(iteration)を 100,000 回実行した
- 確率標本は最後から 5,000 反復分を thin10 で抽出する..

3.4節 結果と考察

BOA の Convergence Diagnostics(収束診断)メニューを利用して,以下の3つの検定を行った.

表 4 Geweke 検定

P 値	μ_1	μ_2	φ_1	φ_2	φ_{12}	τ_1	τ_2
B-BSV モデル	0.17	0.51	0.04	0.46		0.83	0.10
GC-BSV モデル	0.41	0.01	0.21	0.66	0.56	0.88	0.11

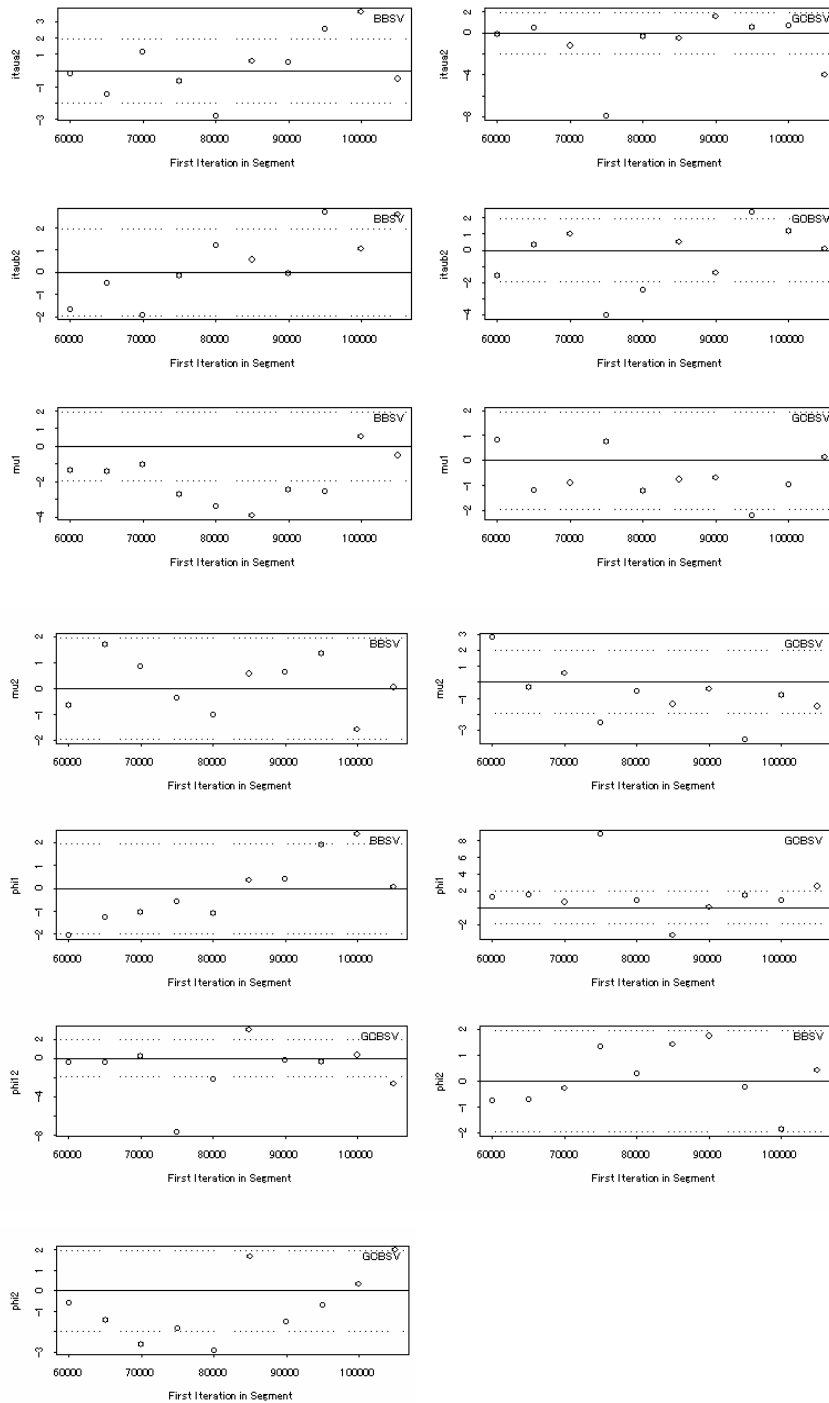


図 1 geweke(左列:B-BSV 右列:GC-BSV)

表 5 Heidelberg & Welch 検定

テスト		μ_1	μ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_{12}	τ_1	τ_2
B-BSV モデル	定常化	Failed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed
	半値幅	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed
GC-BSV モデル	定常化	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed
	半値幅	passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed	Passed

表 6 Raftery & Lewis

依存因子	μ_1	μ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_{12}	τ_1	τ_2
B-BSV モデル	1.03	1.21	1.15	3.80		1.90	2.36
GC-BSV モデル	1.08	2.57	10.37	2.82	6.15	2.44	3.31

表 7 自己相関係数(上段:B-BSV,下段:GC-BSV)

	Lag1	Lag5	Lag10	Lag50
μ_1	0.18	0.00	0.01	0.04
	0.24	0.02	0.01	0.02
μ_2	0.24	0.04	0.00	0.01
	0.45	0.20	0.11	0.02
ϕ_1	0.21	0.02	0.00	0.01
	0.88	0.61	0.45	0.03
ϕ_2	0.49	0.10	0.03	-0.02
	0.60	0.27	0.13	-0.01
ϕ_{12}				
	0.89	0.63	0.46	0.04
τ_1	0.58	0.19	0.04	0.03
	0.55	0.20	0.10	0.05
τ_2	0.62	0.20	0.05	-0.03
	0.68	0.33	0.18	-0.04

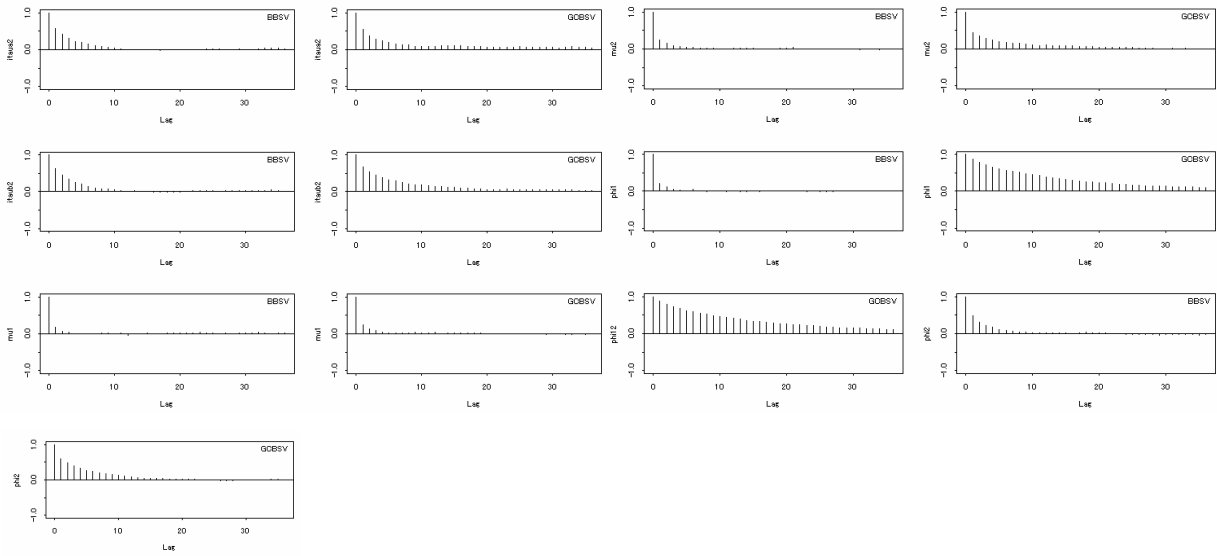


図 2 自己相関

収束判定結果の特長としては、GC-BSV モデルの方が収束しにくくなっていることが読み取れる。そして上述の結果を総合的に判断すると、両モデルとも収束していると考えるのが妥当である。また図 2 より、標本自己相関は一期先の値(Lag1)のみが高いパラメータが多い。それらは、値が同じ位置に留まらず、事後分布の状態空間を効率的にサンプリングできていることを意味している。次に収束済みのパラメータについて以下の表 8 に示す。

表 8 推定されたパラメータ

B-BSV モデル		Topix(1)	S&P(2)	GC-BSV モデル		topix(1)	S&P(2)
μ_1, μ_2	期待値	-9.268	-9.990	μ_1, μ_2	期待値	-9.283	-9.960
	標準偏差	0.275	0.142		標準偏差	0.243	0.105
	標準誤差	0.005	0.003		標準誤差	0.005	0.004
ϕ_1, ϕ_2	期待値	0.979	0.930	ϕ_1, ϕ_2	期待値	0.868	0.930
	標準偏差	0.012	0.046		標準偏差	0.121	0.050
	標準誤差	0.000	0.001		標準誤差	0.008	0.002
ϕ_{12}	期待値	/		ϕ_{12}	期待値	0.398	/
	標準偏差				0.376		
	標準誤差				0.025		
τ_1, τ_2	期待値	53.670	76.620	τ_1, τ_2	期待値	94.030	124.600
	標準偏差	23.150	41.780		標準偏差	58.730	65.970
	標準誤差	0.810	1.470		標準誤差	2.430	3.020

標準誤差が小さいため、推定結果に妥当性があると言える。そして $\phi_{12}=0.398$ は連動性を証明しており、ももとの相関係数に近い値を示している。B-BSV モデルと GC-BSV モデルの値を比較すると、 ϕ_1 の値が 0.979 から 0.868 と変化しており、GC-BSV モデルでは TOPIX 自体のボラティリティの持続性が低くなっている。また GC-BSV モデルでは誤差項の分散値の逆数である itaub2, itaua2 の値が B-BSV モデル

の約 2 倍になっているため, GC-BSV モデルの誤差項の分散値は減少している.したがって, GC-BSV は平均とショックの持続性による説明力が増していることを意味する.しかし,変数を増やせば説明力が増すのは当然である.そこで「モデルの当てはまりの良さ」と「複雑さ」を考慮した指標である偏差情報量基準 DIC(Deviance Information Criteria) [15]による比較を行う.なお DIC は値が低いほど良いとされる.

$$DIC = 2\bar{D} - D(\bar{\theta}) \quad \dots (8)$$

$$D(\theta) = -2 \log(f(y | \theta)) + 2 \log \pi(y) \quad \dots (9)$$

$$f(y | \theta) : \text{尤度関数} \quad \text{今回は } \pi(y) = 1 \text{ とおく [6]}$$

表 9 DIC

DIC	B-BSV	GC-BSV
合計	-6481	-6489

したがって本研究におけるデータにとっては,GC-BSV の方が良いモデルであることが示された.

4章 まとめ

「TOPIX と前日の S&P の連動性を SV モデルに組み入れた GC-BSV」と「単変量 SV モデルを並列計算する B-BSV モデル」のパラメータを MCMC 法支援ソフトの Win BUGS で推定した.なおパラメータは,S-PLUS のライブラリ BOA で 3 種類の収束診断を行ってある.そして GC-BSV モデルと B-BSV モデルをあてはまりの良さと複雑さを考慮した指標の DIC で比較した結果,前者が優れたモデルであると分かった.したがって TOPIX のボラティリティを計算および利用する際には,前日の S&P との連動性を考慮した GC-BSV モデルがより望ましいと言える.

5章 おわりに

本研究では扱っていないが,株価の非対称を反映させたモデル,誤差項を t 分布に変えたモデル,マルコフスイッチングモデル,マルチファクターモデルなどを試すことで,より納得性の高い考察が可能になるであろう.なお拡張モデルはプログラムを少し書き換えるだけで済むモデルも多いため,データの種類を変えるだけでなく様々なモデルの比較を行う必要がある.

6章 参考文献

- [1]yahoo!ファイナンス(<http://table.yahoo.co.jp/t>)最終アクセス 2007 年 10 月 29 日
- [2]yahoo!finace(<http://finance.yahoo.com/q/hp?s=%5EGSPC>)最終アクセス 2007 年 10 月 29 日
- [3]The BUGS Project - Bayesian inference Using Gibbs Sampling (<http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/welcome.shtml>)最終アクセス 2007 年 10 月 29 日
- [4] Bayesian Output Analysis Program(<http://www.public-health.uiowa.edu/boa/Home.html>)最終アクセス 2007 年 10 月 29 日
- [5]大森裕浩(2001)「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」日本統計学会誌, 31, 305-344.
- [6]JunYu(2000)「BUGS for a Bayesian analysis of stochastic volatility models」Economics Journal colume3 pp.198-215.
- [7]Yu, J. and R, Meyer (2006) 「Multivariate Stochastic Volatility Models: Bayesian Estimation and Model Comparison」Economics Reviews 25,361-384.
- [8]大森博隆,渡辺敏明(2007)「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」CIRJE ディスカッションペーパーJ-173,P1-39
- [9]渡部敏明 (2000)「確率的ボラティリティ変動モデル」財団法人 三菱経済研究所
- [10]渡部敏明(2005)「確率的ボラティリティ変動モデル:分析法とモデルの発展」経済科学研究所『紀要』第35号、2005年b,111～133頁
- [11]和合肇編著(2005)「ベイズ計量経済分析 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用」東洋経済新報社
- [12]中妻照雄(2003)「ファイナンスのための MCMC 法によるベイズ分析」三菱経済研究所
- [13]梶田幸作・風岡宏樹 (2007)「WinBUGS の導入手順について」(http://web.sfc.keio.ac.jp/~maunz/BS_WinBUGS/WinBUGS1.pdf) 2007 年 11 月 30 日最終アクセス
- [14]梶田幸作 (2007)「WinBUGS の使い方 サンプル:Seeds を用いて」(http://web.sfc.keio.ac.jp/~maunz/BS_WinBUGS/WinBUGS2.pdf) 2007 年 11 月 30 日最終アクセス
- [15]David Spiegelhalter(2006)「Some DIC slides」(www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/DIC-slides.pdf) 2007 年 11 月 30 日最終アクセス

Appendix

モデルは[7]を参考にした。

表 10 用語の説明

コード	略さずに書くと	意味
isigmaep	inverse sigma epsilon	(1)式の Ω の逆行列
delta	delta	(1)式の Ω の逆行列の際のデルタ部分
dmnorm	distribution multivariate normal	多変量正規分布
dnorm	distribution normal	正規分布
mu	mu	(1)式 y_t の多変量正規分布における平均
mu1	mu 1	μ_1
mu2	mu 2	μ_2
hmean	h mean	(2)式 h_t の正規分布における平均
itaua2	inverse tau a 2	誤差項 τ_1 の分散の逆数の2乗
itaub2	inverse tau b 2	誤差項 τ_2 の分散の逆数の2乗
h	h	(2)式の h
phi1star	phi 1 star	$(\phi_1+1)/2$
phi2star	phi 2 star	$(\phi_2+1)/2$
phi1	phi1	ϕ_1
phi2	phi2	ϕ_2
phi12	phi12	ϕ_{12}
dbeta	distribution beta	ベータ分布
dgamma	distribution gamma	ガンマ分布

```
#####
B-BSV
#####
model{
  for (i in 1:n) {
    delta[i]<-exp(h[i,1]+h[i,2])
    isigmaep[i,1,1] <- exp(h[i,2])/delta[i]
    isigmaep[i,2,2] <- exp(h[i,1])/delta[i]
    isigmaep[i,1,2] <- 0
    isigmaep[i,2,1] <- 0
    y[i,1:2]~ dmnorm(mu[,isigmaep[i,,])
  }
  mu[1]<-0
  mu[2]<-0
  hmean[1,1] <- mu1
  hmean[1,2] <- mu2
  h[1,1]~dnorm(hmean[1,1],itaua2)
  h[1,2]~dnorm(hmean[1,2],itaub2)
  for (i in 2:n) {
    hmean[i,1] <- mu1 + phi1*(h[i-1,1]-mu1)
    hmean[i,2] <- mu2 + phi2*(h[i-1,2]-mu2)
    h[i,1]~dnorm(hmean[i,1],itaua2)
    h[i,2]~dnorm(hmean[i,2],itaub2)
  }
  phi1star ~ dbeta(20,1.5)
  phi1 <- 2*phi1star -1
}
```

```

phi2star ~ dbeta(20,1.5)
phi2 <- 2*phi2star - 1
itaua2 ~ dgamma(2.5,0.025)
itaub2 ~ dgamma(2.5,0.025)
mu1 ~ dnorm(0,0.04)
mu2 ~ dnorm(0,0.04)
}

list(phi1star=0.99, phi2star=0.99,mu1=0,mu2=0,itaua2=100,itaub2=100)

#####
GC-BSV
#####
model {
for (i in 1:n) {
    delta[i]<-exp(h[i,1]+h[i,2])
    isigmaep[i,1,1] <- exp(h[i,2])/delta[i]
    isigmaep[i,2,2] <- exp(h[i,1])/delta[i]
    isigmaep[i,1,2] <- 0
    isigmaep[i,2,1] <- 0
    y[i,1:2]~ dmnorm(mu[,isigmaep[i,,])
}
mu[1]<-0
mu[2]<-0
hmean[1,1] <- mu1
hmean[1,2] <- mu2
h[1,1]~dnorm(hmean[1,1],itaua2)
h[1,2]~dnorm(hmean[1,2],itaub2)
for (i in 2:n) {
    hmean[i,1] <- mu1 + phi1*(h[i-1,1]-mu1)+phi12*(h[i-1,2]-mu2)
    hmean[i,2] <- mu2 + phi2*(h[i-1,2]-mu2)
    h[i,1]~dnorm(hmean[i,1],itaua2)
    h[i,2]~dnorm(hmean[i,2],itaub2)
}
phi1star ~ dbeta(20,1.5)
phi1 <- 2*phi1star - 1
phi2star ~ dbeta(20,1.5)
phi2 <- 2*phi2star - 1
phi12~dnorm(0,0.1)
itaua2 ~ dgamma(2.5,0.025)
itaub2 ~ dgamma(2.5,0.025)
mu1 ~ dnorm(0,0.04)
mu2 ~ dnorm(0,0.04)
}

```

```
list(phi1star=0.99, phi2star=0.99,mu1=0,mu2=0,itaua2=100,itaub2=100, phi12=0.8)
```

```
#####
Data(左列が TOPIX,右列が S&P)
#####
list(n=476,
y=structure(
    .Data=c(0.013679586,0.015066534,
0.019639579,0.003238233,

```



```

0.00058783,-0.000608023,
.....途中省略.....
0.0072207,0.001711849,
0.005078902,-0.00226565),
.Dim=c(476,2)
)

```

WinBUGS の使用方法は参考文献[13][[]]

BOA の使用方法(BOA は参考文献[]よりあらかじめインストールする必要がある)

- 1 S-PLUS の確率標本を WinBUGS の coda で出力.
- 2 出力された2ファイルをテキストファイル形式で保存
確率標本を含むファイルを「.out」の拡張子に変更
.out ファイル内のインデックスファイルを「.ind」拡張子に変更
- 3 両ファイルを S-PLUS のワーキング・ディレクトリ(作業ディレクトリ)に移動
- 4 S-PLUS を起動
- 5 Script ファイルを開く
- 6 対話式関数を呼び出すためのプログラミングを行う
Library(boa) #ライブラリ BOA の読み込み
Boa.menu() #対話式関数 boa.menu()の呼び出し
- 7 F10 もしくは実行ボタンでプログラムを動かす

以下,出力画面とキーボードからの入力に対話式関数を作動させる(以下に B-BSV の例を記載する.)

```

> library(boa)
> boa.menu()

```

```

Bayesian Output Analysis Program (BOA)
Version 1.1.2 for Microsoft Windows
Copyright (c) 2004 Brian J. Smith <brian-j-smith@uiowa.edu>

```

```

This program is free software; you can redistribute it and/or
modify it under the terms of the GNU General Public License
as published by the Free Software Foundation; either version 2
of the License or any later version.

```

```

This program is distributed in the hope that it will be useful,
but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
GNU General Public License for more details.

```

```

For a copy of the GNU General Public License write to the Free
Software Foundation, Inc., 59 Temple Place - Suite 330, Boston,
MA 02111-1307, USA, or visit their web site at
http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html

```

```

NOTE: if the menu unexpectedly terminates, type "boa.menu(recover= TRUE)" to
restart and recover your work

```

```

BOA MAIN MENU
*****

```

```
1: File    >>
2: Data    >>
3: Analysis >>
4: Plot    >>
5: Options >>
6: Window  >>
```

```
Selection:          # キーボードの 1 を押す
FILE MENU
```

```
=====
1: Back
2: -----+
3: Import Data    >> |
4: Load Session  |
5: Save Session   |
6: Exit BOA      |
7: -----+

```

```
Selection:          # キーボードの 3 を押す
IMPORT DATA MENU
```

```
-----
1: Back
2: -----+
3: BUGS Output File |
4: Flat ASCII File  |
5: Data Matrix Object |
6: View Format Specifications |
7: Options...       |
8: -----+

```

```
Selection:          # キーボードの 7 を押す
Data Parameters
```

Files

```
-----
1) Working Directory: ""
2) ASCII File Ext:   ".txt"
```

Select parameter to change or press <ENTER> to continue

```
1: 1          # キーボードの 1 を押す
```

NOTE: Specified directory must not end with a slash

Enter new character string

```
1: C:/Program Files/Insightful/splus61/users/***** #作業ディレクトリを入力
#通例*****に PC の owner 名
```

```
IMPORT DATA MENU
```

```
-----
1: Back
2: -----+
3: BUGS Output File |
4: Flat ASCII File  |
5: Data Matrix Object |
6: View Format Specifications |
7: Options...       |
8: -----+

```

```
Selection:          # キーボードの 3 を押す
```

```
Enter filename prefix without the .ind or .out extension [Working Directory: "C:/Program
```

```
Files/Insightful/splus61/users/*****"]
1: BBSV
たファイル名を入力
+++ Data successfully imported +++
で読み込む
```

```
# 作業ディレクトリ内におい
# .ind .out は省き,2つセット
```

IMPORT DATA MENU

```
-----
1: Back
2: -----+
3: BUGS Output File |
4: Flat ASCII File  |
5: Data Matrix Object |
6: View Format Specifications |
7: Options...       |
8: -----+
```

```
# キーボードの1を押す
```

```
Selection:
FILE MENU
```

```
=====
1: Back
2: -----+
3: Import Data      >> |
4: Load Session    |
5: Save Session     |
6: Exit BOA        |
7: -----+
```

```
# キーボードの1を押す
```

```
Selection:
BOA MAIN MENU
```

```
*****
1: File    >>
2: Data    >>
3: Analysis >>
4: Plot    >>
5: Options >>
6: Window  >>
```

```
# キーボードの3を押す
```

```
Selection:
ANALYSIS MENU
```

```
=====
1: Back
2: -----+
3: Descriptive Statistics >> |
4: Convergence Diagnostics >> |
5: Options...             |
6: -----+
```

```
# キーボードの4を押す(収束判定へ)
```

```
Selection:
CONVERGENCE DIAGNOSTICS MENU
```

```
-----
1: Back
2: -----+
3: Brooks, Gelman & Rubin |
4: Geweke                 |
5: Heidelberger & Welch  |
6: Raftery & Lewis       |
7: -----+
```

```
# キーボードの4を押すと,結果が出力される.
```

```
Selection:
```

GEWEKE CONVERGENCE DIAGNOSTIC:

Fraction in first window = 0.1
 Fraction in last window = 0.5

Chain: BBSV

	itaua2	itaub2	mu1	mu2	phi1	phi2
Z-Score	-0.2147077	-1.67961836	-1.3752232	-0.6568470	-2.06847665	-0.7462450
p-value	0.8299953	0.09303159	0.1690623	0.5112793	0.03859522	0.4555194

Press <ENTER> to continue
 CONVERGENCE DIAGNOSTICS MENU

- 1: Back
- 2: -----+
- 3: Brooks, Gelman & Rubin |
- 4: Geweke |
- 5: Heidelberger & Welch |
- 6: Raftery & Lewis |
- 7: -----+

Selection: # キーボードの 5 を押すと, 結果が出力される.
 HEIDLEBERGER AND WELCH STATIONARITY AND INTERVAL HALFWIDTH TESTS:

Halfwidth test accuracy = 0.1

Chain: BBSV

	Stationarity Test	Keep	Discard	C-von-M	Halfwidth Test	Mean
itaua2	passed	5000	0	0.0897038	passed	53.6691412
itaub2	passed	5000	0	0.1225359	passed	76.6224476
mu1	failed	2000	3000	1.6014258	passed	-9.2597168
mu2	passed	5000	0	0.1081168	passed	-9.9902430
phi1	passed	5000	0	0.3490321	passed	0.9785464
phi2	passed	5000	0	0.1417963	passed	0.9301712

Halfwidth

itaua2	1.3821282945
itaub2	2.4686151628
mu1	0.0127378837
mu2	0.0058836046
phi1	0.0004239118
phi2	0.0024428230

Press <ENTER> to continue
 CONVERGENCE DIAGNOSTICS MENU

- 1: Back
- 2: -----+
- 3: Brooks, Gelman & Rubin |
- 4: Geweke |

```
5: Heidelberger & Welch |
6: Raftery & Lewis      |
7: -----+

```

キーボードの 6 を押すと, 結果が出力される.

```
Selection:
RAFTERY AND LEWIS CONVERGENCE DIAGNOSTIC:
=====
```

```
Quantile = 0.025
Accuracy = +/- 0.005
Probability = 0.95
```

```
Chain: BBSV
=====
```

	Thin	Burn-in	Total	Lower Bound	Dependence Factor
itaua2	2	4	7134	3746	1.904431
itaub2	2	6	8854	3746	2.363588
mu1	1	2	3866	3746	1.032034
mu2	1	2	4531	3746	1.209557
phi1	1	3	4301	3746	1.148158
phi2	3	12	14235	3746	3.800053

```
Press <ENTER> to continue
CONVERGENCE DIAGNOSTICS MENU
=====
```

```
1: Back
2: -----+
3: Brooks, Gelman & Rubin |
4: Geweke                 |
5: Heidelberger & Welch  |
6: Raftery & Lewis       |
7: -----+

```

キーボードの 1 を押す

```
Selection:
ANALYSIS MENU
=====
```

```
1: Back
2: -----+
3: Descriptive Statistics >> |
4: Convergence Diagnostics >> |
5: Options...                 |
6: -----+

```

キーボードの 1 を押す

```
Selection:
BOA MAIN MENU
*****
```

```
1: File >>
2: Data >>
3: Analysis >>
4: Plot >>
5: Options >>
6: Window >>

```

キーボードの 4 を押す

```
Selection:
PLOT MENU
=====
```

```
1: Back
2: -----+

```

```
3: Descriptive          >> |
4: Convergence Diagnostics >> |
5: Options...          |
6: -----+
Selection:
```

キーボードの 4 を押す

```
CONVERGENCE DIAGNOSTICS PLOT MENU
-----
```

```
1: Back
2: -----+
3: Brooks & Gelman |
4: Gelman & Rubin  |
5: Geweke          |
6: -----+
Selection:
```

キーボードの 5 を押すと, プロットがで出力される.

このようにして対話式関数を進める.