

**数理計画法パッケージ**  
**数理システム Numerical Optimizer<sup>1</sup>の現在とこれから**  
**NTT データ数理システム**  
**数理計画部 田辺隆人**

### 1. 線形計画法と単体法・内点法

目的関数と制約式が線形式である線形計画法は数理計画法の基本であり、数理システム Numerical Optimizer にはその代表的な解法である単体法と内点法が実装されている。線形計画法の教科書では「ダイエット問題」や「最小費用流問題」といった例題が紹介されているが、実際には、非線形関数や離散変数を含んだより難しい問題を緩和してできる問題（緩和問題）の解法としての用途が多く、レコメンドやスケジューリングなどのより汎用的な応用問題に必須なツールとして位置付けられている。2013年現在における線形計画法アルゴリズムと実装は数十万変数の規模まで「解けて当たり前」というレベルまで安定しており、数理システム Numerical Optimizer にも、疎行列構造を生かした効率的な行列解法や数値的な処理に至るまで数十年にわたって蓄積されてきた技術が集約されている。Numerical Optimizer では V14 より、マルチコア環境を生かした数値演算ライブラリを利用することにより、行列解法を高速化している。さらに V16 では制約行列の係数の大小を調整するスケーリング処理を改良してより安定な数値的性能を実現している。

### 2. 二次計画法と有効制約法・内点法

数理システム Numerical Optimizer には二次計画問題の解法として有効制約法・内点法が実装されている。二次計画法単独の主要な応用分野と言えばポートフォリオ最適化問題であり、二次計画法を適用することによって数千銘柄でも数秒で最適解が導けるマルコビッツモデル[1]は機関投資家の必須ツールの地位を確立している。今日においては解法の成熟とともに、二次計画法は線形計画法とほぼ同程度「解けて当たり前」の難しさと捉えられてはいるが、ソルバーの実装技術としてはヘッセ行列の扱いなど、線形計画法にない工夫が必要であり、古い実装技術に基づくソルバーやフリーのソルバーから数理システム Numerical Optimizer に乗り換えたところ結果が大幅に改善したという事例は多数存在する。前項で述べた V16 で導入されるスケーリング処理はこの二次計画法の安定性にも貢献する。

### 3. 離散計画問題とメタヒューリスティック解法

離散計画問題は厳密解を求めることが難しいことが知られているがために困難であるという認識が広く行きわたっているが、実は「そこそこ良い解」で納得できる状況であれば、その限りではない。一定の規則に従って初期解の改善を繰り返すメタヒューリスティック解法が、スケジューリングや割り当て問題などの典型的な離散計画問題に大きな効果を発揮することが知られている。数理システム Numerical Optimizer には離散最適化のための WCSP アルゴリズム[2][3]が組み入れられている。このアルゴリズムは厳密な最適解である保障はないが、一定の探索操作において得られた良解を高速に多数個出力する。WCSP があることで、我々は離散計画法の解の感触を「まず掴む」ために数理システム Numerical Optimizer を適用してみる、という利用が可能となっており、モデルが流動的で要件が曖昧なスケジューリング問題[4]などにおいて大きく貢献している。また、施設保守計画問題[5]など、ラグランジュ緩和によって緩和された大規模部分問題の解法としても採用されている。数理システム Numerical Optimizer の V15 では複数の解の探索をマルチコア環境で行わせる機能が実装され、さらに V16 では WCSP の実装を一部工夫することによって、典型的な大規模問題について、約 2 倍程度の速度を実現している。

---

<sup>1</sup> 本バージョン V16 から、NUOPT より名称を変更します。

**4. 非線形計画法・半正定値計画法と内点法・自動微分機能付きモデリング言語 SIMPLE**  
一般に非線形計画問題を高速かつ精度良く解くためには、目的関数や制約式の一階・二階微係数を与えることが必要である。一般の非線形関数は微係数が変数の値に依存するため、問題の情報を与える部分とアルゴリズムを実行する部分のやりとりが頻繁に発生するので、非線形最適化ソルバーはソフトウェアシステムとしての「組み立て」が性能に大きくかわる。数理システム Numerical Optimizer は非線形計画法のアルゴリズムと自動微分機能を持つモデリング言語 SIMPLE が一体化した形を取っているため、ユーザーがモデリング言語の形式で定式記述をするのみで、正確な微係数情報がアルゴリズムに供給可能で、非線形最適化ソルバーとしては理想的な構成となっている。V11 からは非線形な半正定値計画問題を解くアルゴリズムを実装したが、ここでもユーザーは SIMPLE を用いることによって行列制約を簡素に記述することが可能で、類似のソルバーにはない特徴となっている。さらに、非線形最適化のアルゴリズム[6][7]の安定性は数理システム Numerical Optimizer の大きな特徴であり、特にロジスティック回帰やロバストポートフォリオなど、非線形関数を含む凸計画問題においては「解けて当たり前」という安定性を確保し、実務的な非線形混合問題[8]にも応用されている。

#### 5. 混合整数計画問題と分枝限定法

変数の一部が離散変数であることを許す混合整数計画問題が問題クラスとしては最も難しい。このクラスの問題には古くから分枝限定法と呼ばれる手法が知られており、特に線形なケース（混合整数線形計画問題）については実装の研究が盛んである。分枝限定法はシステムティックに緩和問題（混合整数線形計画問題の場合には線形計画問題）を解き続けることにより、解の存在領域を狭めてゆこうとするものである。しかし、解法の骨組みは解の列挙に依っていることから理論的な性能は高くない。そのため定式化のパターンに応じた切除平面法（数理システム Numerical Optimizer においては V12 で導入）やヒューリスティクス（同 V12 で導入）、さらには整数変数相互の関連を詳細に検討して、変数を固定する前処理手法（同 V13 で強化）といった補助的な手法、さらには並列化（同 V14 で導入）といった手法を注意深く適用することで初めて実用的な性能が確保できる。数理システム Numerical Optimizer V16 は新たな前処理技術を導入し、性能の向上を実現しており、今後もヒューリスティック解法の強化など研究開発を続ける。

#### 6. 今後に向けて

こうして見てきたように、数理システム Numerical Optimizer にはアルゴリズム、数値計算一般の多彩なノウハウが集約されている。今後も随一の国産ソルバーとして最新のアルゴリズムや研究成果を取り込む。さらにマルチコア化・クラウド化などハードウェアの環境変化、python や R の普及などのソフトウェア環境の変化に積極的に追従してゆく。

#### 参考文献

- [1] 枇々木規雄, 田辺隆人, ポートフォリオ最適化と数理計画法, 朝倉書店[2005].
- [2] K. Nonobe and T. Ibaraki, A tabu search approach for the constraint satisfaction problem as a general problem solver, European Journal of Operational Research 106, pp. 599-623, 1998.
- [3] K. Nonobe and T. Ibaraki, An improved tabu search method for the weighted constraint satisfaction problem, INFOR 39, pp.131-151, 2001.
- [4] 田辺隆人, 新田利博, 嶋田佳明, 多田明功, 東日本旅客鉄道株式会社様勤務システム「J I N J R E (勤務)」における数理計画法を用いた自動勤務表作成, 数理システムユーザー会 2008.

- [5] 安野貴人, 岩永二郎, 田辺 隆人, ラグランジュ緩和法を用いた土木構造物の長期修繕計画における予算平準化問題の汎用解法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集 2010, 32-33, 2010-03-04
- [6] H. Yamashita, H. Yabe, and T. Tanabe, A globally and superlinearly convergent primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization, *Mathematical Programming Ser.B*, January 2005, Vol.102, Number 1, pp.111-151
- [7] Hiroshi Yamashita, Hiroshi Yabe, Kouhei Harada, A primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming
- [8] 津崎賢治, 河本薫, 岡村智仁, 上田智一, 河田啓介, 田辺隆人, 原田耕平, 二反田篤史, 新田利博, 島田 直樹, LNG 基地におけるタンクオペレーション計画導出支援システム(在庫管理), 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集 2012, 42-43, 2012-03-27